Теорема 2. *Пусть многообразие M_g такое, что для некоторой константы $q > 1$ выполняется условие*

$$\limsup_{\rho\to\infty} \rho^{\frac{2}{q-1}} \left(\frac{\int_{\rho/2}^{\rho} g^{n-1}(r)\,dr}{\int_{\rho/4}^{2\rho} g^{n-1}(r)\,dr} \right)^{\frac{1}{q-1}} \int\limits_{2\rho}^{\infty} \frac{ds}{g^{n-1}(r)} = +\infty.$$

Тогда любое неотрицательное решение неравенства (2) на Ω_e есть тождественный нуль.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02479-р_поволжье_а).

Литература

1. Лосев А. Г. *О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях* // Сиб. матем. журнал. – 1998. – Т. 39, № 1. – С. 87-93.

2. Решетняк Ю. Г. *К теории соболевских классов функций со значениями в метрическом пространстве* // Сиб. матем. журнал. – 2006. – Т. 47, № 1. – С. 146–168.

3. Bidaut-Veron M., Pohozaev S. I. *Non-existence results and estimates for some nonlinear elliptic problems* // J. Anal. Math. – 2001. – V. 84. – P. 1–49.

LIOUVILLE-TYPE RESULTS FOR THE STATIONARY GINZBURG-LANDAU EQUATION AND ELLIPTIC INEQUALITIES OF A SPECIAL FORM ON MODEL LIPSCHITZ MANIFOLDS

S.S. Vikharev

We establish conditions for the fulfillment of Liouville-type theorems on the triviality of bounded solutions of a special type elliptic inequality, as well as of the stationary Ginzburg-Landau equation on model Lipschitz manifolds.

Keywords: Lipschitz manifolds, stationary Ginzburg-Landau equation, Liouville-type results.

УДК 517

ПРОСТРАНСТВА ТИПА L_1 И РАЗЛОЖЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

Л.В. Веселова[1], Ан.Ан. Новиков[2], О.Е. Тихонов[3]

1 *lidveselova@gmail.com*; Казанский национальный исследовательский технологический университет
2 *a.hobukob@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
3 *oleg.tikhonov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Обобщая ряд известных конструкций теории интегрирования относительно нормальных функционалов и весов на алгебрах фон Неймана, мы вводим и изучаем пространства типа L_1, ассоциированные с положительными функционалами на упорядоченных векторных пространствах. В качестве приложения приведены новые результаты о представлениях положительных нормальных функционалов на алгебрах фон Неймана.

Ключевые слова: положительный функционал, пространство с базовой нормой, пространство с порядковой единицей, алгебра фон Неймана, вес, почти доминируемый функционал, сингулярный функционал, разложение Лебега.

Данная работа инициирована подходом А. Н. Шерстнева к теории интегрирования относительно нормальных функционалов и весов на алгебрах фон Неймана (см. [9, 10]), а также решением двойственной задачи построения пространств типа L_1, ассоциированных с положительными самосопряженными операторами, присоединенными к алгебре фон Неймана [1, 3]. Представляется естественным получать ряд конструкций и утверждений как частные случаи более общего подхода в рамках упорядоченных векторных пространств, который реализован в разделе 1. В разделе 2 показано, как некоторые утверждения раздела 1 совместно с известными утверждениями теории некоммутативного интегрирования позволяют получить новые результаты о представлениях положительных нормальных функционалов на алгебрах фон Неймана.

1. Пространство с базовой нормой и пространство с порядковой единицей, ассоциированные с положительным функционалом

Пусть X^+ — конус положительных элементов в положительно порожденном упорядоченном векторном пространстве X над $\mathbb{R}$. Пусть F — алгебраически сопряженное к X и F^+ — сопряженный конус положительных линейных функционалов на X. Для $f \in F^+$ положим

$$J_f = \{g \in F : -\lambda f \leq g \leq \lambda f \text{ для некоторого } \lambda \in \mathbb{R}^+\}.$$

Легко проверить, что J_f — линейное подпространство F, конус $J_f^+ = J_f \cap F^+$ порождает J_f и что f — порядковая единица в $J_f$ãîîáùå. Более того, формула

$$\|g\|^f = \inf\{\lambda \geq 0 : -\lambda f \leq g \leq \lambda f\}$$

определяет норму на J_f, которая превращает J_f в полное пространство с порядковой единицей. Соответствующий единичный шар $\{g \in F : -f \leq g \leq f\}$ обозначим $J_{f,1}$.

Для такого $f \in F^+$ введем полунорму r_f на X:

$$r_f(x) = \inf\{f(x') + f(x'') : x', x'' \in X^+;\ x = x' - x''\} \tag{1}$$

и положим: $X_{f,0} = \{x \in X : r_f(x) = 0\}$, $X_{f,1} = \{x \in X : r_f(x) \leq 1\}$. Ясно, что $r_f(x) = f(x)$ для $x \in X^+$.

Предложение [4]. *Поляра $X_{f,1}^\circ$ есть $J_{f,1}$.*

Теорема 1.1. *Пусть Y — такое подпространство пространства F, что каноническая билинейная форма $\langle X, F\rangle$ ставит в двойственность X и Y, и пусть $J_f \subset Y$. Полунорма r_f является нормой в том и только том случае, когда J_f плотно в Y в топологии $\sigma(Y, X)$.*

Замечание 1. Пусть X — упорядоченное банахово пространство с замкнутым порождающим конусом X^+. Если f — положительный линейный функционал на X, то

f автоматически ограничен и J_f — линейное подпространство сопряженного упорядоченного банахова пространства X^*. Теорема 1.1 говорит в этом случае, что полунорма r_f на X является нормой тогда и только тогда, когда J_f *-слабо плотно в X^*.

Если в качестве X взять эрмитову часть алгебры фон Неймана, а в качестве f — точный положительный нормальный функционал на X, то r_f — норма [9, 10]. Более того, от условия нормальности можно отказаться [5]. В то же время, авторам неизвестно, будет ли r_f нормой, если в качестве X взять эрмитову часть C*-алгебры, а в качестве f — точный положительный функционал на этой алгебре, или, что эквивалентно, будет ли J_f *-слабо плотно в пространстве эрмитовых ограниченных функционалов на рассматриваемой алгебре.

Другие нетривиальные примеры, когда r_f — норма, возникают в “двойственных” задачах теории некоммутативного интегрирования [1, 3].

В дальнейшем будем предполагать, что r_f — норма, и через $(\widehat{X}_f, \|\cdot\|_f)$ обозначать соответствующее пополнение нормированного пространства X. Для $g \in J_f$ той же самой буквой будем обозначать и соответствующее продолжение g по непрерывности на $\widehat{X}_f$.

Обозначим:

$$K_f = \{\hat{x} \in \widehat{X}_f : \hat{x} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n,\ x_n \in X^+,\ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_f < \infty\}. \tag{2}$$

Ясно, что $X^+ \subset K_f$, K_f — конус, и что $\|\hat{x}\|_f = f(\hat{x})$ для любого $\hat{x} \in K_f$.

Теорема 1.2. *K_f порождает $\widehat{X}_f$. Более того, для любого $\hat{x} \in \widehat{X}_f$ выполняется равенство $\|\hat{x}\|_f = \inf\{f(\hat{x}') + f(\hat{x}'') : \hat{x}', \hat{x}'' \in K_f;\ \hat{x} = \hat{x}' - \hat{x}''\}$.*

Теорема 1.3. *Для $\hat{x} \in \widehat{X}_f$ эквивалентны следующие условия:*
(i) $\|\hat{x}\|_f = f(\hat{x})$,
(ii) $g(\hat{x}) \geq 0$ для любого $g \in J_f^+$,
(iii) $\hat{x}$ лежит в замыкании конуса X^+ по норме.

Замыкание X^+ по норме в $\widehat{X}_f$ будем обозначать $\widehat{X}_f^+$. Ясно, что $K_f \subset \widehat{X}_f^+$, и что $\widehat{X}_f^+$ — порождающий конус в $\widehat{X}_f$.

Замечание 2. Банахово пространство $\widehat{X}_f$ с конусом положительных элементов $\widehat{X}_f^+$ и базой $\{\hat{x} \in \widehat{X}_f^+ : f(\hat{x}) = 1\}$ является *пространством с базовой нормой* в смысле [1]. Банахово сопряженным к нему является пространство с порядковой единицей $(J_f, \|\cdot\|^f)$.

Положим: $S_f = \{\hat{x} \in \widehat{X}_f^+ : 0 \leq x \leq \hat{x},\ x \in X^+ \implies x = 0\}$.

Теорема 1.4. *Любой элемент $\hat{x} \in \widehat{X}_f^+$ допускает представление $\hat{x} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$, где $\hat{x}_1 \in K_f$, $\hat{x}_2 \in S_f$. Единственность такого представления для любого $\hat{x} \in \widehat{X}_f^+$ эквивалентна условию $\widehat{X}_f^+ = K_f$.*

2. Почти доминируемые функционалы и единственность лебеговского разложения положительных функционалов

Всюду далее φ — точный нормальный полуконечный вес на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Множество положительных операторов из алгебры обозначаем $\mathcal{M}^+$. Пространство ультраслабо непрерывных функционалов на $\mathcal{M}$ обозначаем $\mathcal{M}_*$, его эрмитову и положительную части — $\mathcal{M}_*^h$ и $\mathcal{M}_*^+$ соответственно.

Пусть $\mathfrak{m}_\varphi^+ = \{x \in \mathcal{M}^+ : \varphi(x) < \infty\}$, $\mathfrak{m}_\varphi^{\text{sa}} = \mathfrak{m}_\varphi^+ - \mathfrak{m}_\varphi^+$. Тогда $\mathfrak{m}_\varphi^{\text{sa}}$ — упорядоченное векторное пространство, $\mathfrak{m}_\varphi^+$ — конус его положительных элементов. Вес φ однозначно продолжается до положительного линейного функционала на $\mathfrak{m}_\varphi^{\text{sa}}$, обозначаемого далее той же буквой φ. Полунорма r_φ на $\mathfrak{m}_\varphi^{\text{sa}}$ (см. (1)) является нормой [9, 10], которую мы ранее условились обозначать $\|\cdot\|_\varphi$. Пополнение $\mathfrak{m}_\varphi^{\text{sa}}$ по норме $\|\cdot\|_\varphi$ будем обозначать $\widehat{L}_1^h(\varphi)$.

Определение 2.1. Будем говорить, что вес φ *доминирует* функционал $\psi \in \mathcal{M}_*^+$, если $\psi \leq \lambda\varphi$ при некотором $\lambda \geq 0$; φ *почти доминирует* ψ, если ψ представим в виде $\psi = \sum_{i \in I} \psi_i$, где каждый из функционалов ψ_i доминируется весом φ, в последнем случае будем использовать обозначение $\psi \ll \varphi$.

Известно (напр., [8]), что существует единственное отображение $\gamma : \mathfrak{m}_\varphi^{\text{sa}} \to \mathcal{M}_*^h$, удовлетворяющее условиям:

(γ1) $\gamma(x)(1) = \varphi(x)$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi^{\text{sa}})$,

(γ2) $\gamma(\mathfrak{m}_\varphi^{\text{sa}}) = \{\psi \in \mathcal{M}_*^+ : \exists\lambda \in \mathbb{R}^+(\psi \leq \lambda\varphi)\}$,

(γ3) $\{x, y\} \mapsto \gamma(x)(y)$ — симметричная положительная билинейная форма на $\mathfrak{m}_\varphi^{\text{sa}}$.

Отображение γ является изометрическим и порядковым изоморфизмом, $\gamma(\mathfrak{m}_\varphi^{\text{sa}})$ плотно в $\mathcal{M}_*^h$. Будем использовать ту же букву γ для обозначения соответствующего изометрического и порядкового изоморфизма $\widehat{L}_1^h(\varphi)$ на $\mathcal{M}_*^h$. Таким образом, в обозначениях (2) имеем: $\gamma(K_\varphi) = \{\psi \in \mathcal{M}_*^+ : \psi \ll \varphi\}$, и теорема 1.2 влечет:

Теорема 2.1. *Любой $\psi \in \mathcal{M}_*^h$ может быть представлен в виде $\psi = \psi' - \psi''$, где $\psi', \psi'' \ll \varphi$.*

Следствие. *Для любого $\psi \in \mathcal{M}_*^+$ найдется $\psi' \in \mathcal{M}_*^+$ такой, что $\psi' \ll \varphi$ и $\psi \leq \psi'$.*

Определение 2.2. Функционал $\psi \in \mathcal{M}_*^+$ называется *сингулярным* относительно φ (обозначаем: $\psi \perp \varphi$), если условия $\psi' \in \mathcal{M}_*^+$, $\psi' \leq \psi$, $\psi' \leq \varphi$ влекут $\psi' = 0$.

Ясно, что $\{\psi \in \mathcal{M}_*^+ : \psi \perp \varphi\} = \gamma(S_\varphi)$ и по теореме 1.4 любой $\psi \in \mathcal{M}_*^+$ допускает представление $\psi = \psi_1 + \psi_2$, где $\psi_1 \ll \varphi$, $\psi_2 \perp \varphi$. Такого вида преставление часто называют *лебеговским разложением* положительного нормального функционала.

Определение 2.3 [6, 7]. Вес φ называется *регулярным*, если $\psi \ll \varphi$ каков бы ни был $\psi \in \mathcal{M}_*^+$.

Теорема 1.4 тогда влечет:

Теорема 2.2. *Представление $\psi = \psi_1 + \psi_2$, где $\psi_1 \ll \varphi$, $\psi_2 \perp \varphi$, единственно для каждого $\psi \in \mathcal{M}_*^+$ в том и только том случае, когда вес φ регулярен.*

Замечание 3. В работах [6, 7] Н. В. Трунов изучал почти доминируемые функционалы и регулярные веса в связи с задачами теории интегрирования относительно нормальных весов на алгебрах фон Неймана. Его результаты совместно с теоремой 2.2 влекут ряд, на наш взгляд, интересных следствий относительно единственности лебеговского разложения положительных нормальных функционалов на различных алгебрах фон Неймана.

Литература

1. Azimow L., Ellis A. J. *Convexity theory and its applications in functional analysis.* – London: Academic Press, 1980. – 268 p.

2. Novikov An. *L_1-space for a positive operator affiliated with von Neumann algebra* // Positivity. – 2017. – V. 21. – P. 359—375.

3. Novikov An. An., Tikhonov O. E. *Measures on orthoideals and L_1-spaces associated with positive operators* // Lobachevskii J. Math. – 2016. – V. 37. – P. 497–499.

4. Скворцова Г. Ш., Тихонов О. Е. *Выпуклые множества в некоммутативных L_1-пространствах, замкнутые в топологии локальной сходимости по мере* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 8. – С. 48–55.

5. Столяров А. И., Тихонов О. Е. *О характеризации следов в терминах теории некоммутативного интегрирования*. – Казань, 1992. – 9 с. – Казань, Казанск. ун-т. Деп. в ВИНИТИ 05.11.92, № 3186-В92.

6. Трунов Н. В. *Интегрирование в алгебрах Неймана и регулярные веса* // Констр. теория функций и функц. анализ. – Казань, 1981. – Вып. 3. – С. 73–87.

7. Трунов Н. В. *К теории нормальных весов на алгебрах Неймана* // Изв. вузов. Математика. – 1982. – № 8. – С. 61–70.

8. Трунов Н. В. *Интегрирование относительно веса на JBW-алгебрах* // Функц. анализ и его прил. – 1985. – Т. 19, вып. 3. – С. 77–78.

9. Трунов Н. В., Шерстнев А. Н. *Введение в теорию некоммутативного интегрирования* // Современные пробл. математики. Новейшие достижения. Т. 27 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). – М., 1985. – С. 167–190.

10. Шерстнев А. Н. *Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 264 с.

L_1-TYPE SPACES AND DECOMPOSITIONS OF POSITIVE FUNCTIONALS ON VON NEUMANN ALGEBRA

L.V. Veselova, An.An. Novikov, O.E. Tikhonov

We introduce and study L_1-type spaces associated with positive functionals on ordered vector spaces. As an application, we give new results on representations of normal positive functionals on von Neumann algebras.

Keywords: positive functional, base norm space, order unit space, von Neumann algebra, weight, almost dominated functional, singular functional, Lebesgue decomposition.